



Europäische Union. Europäischer
Fonds für regionale Entwicklung.
Evropská unie. Evropský fond pro
regionální rozvoj.



Ahoj sousede. Hallo Nachbar.
Interreg V A / 2014 – 2020

Simulace proudění podzemní vody ve skládkách

Simulation von Grundwasserströmungen in Deponien

Jan Šembera

12. 12. 2017

Pojmy / Begriffe

- tlak p , tlaková výška h_p ,
piezometrická výška h :

$$p = h_p \rho g,$$

- hladina
- rychlost v_{ef} , darcyovská
rychlost v , tok q :

$$v_{ef} = v / \theta_A,$$

- pórovitost

$$\theta = V_{por} / V$$

- Druck p , Druckhöhe h_p ,
Piezometrische Höhe h :

$$h = h_p + z$$

- Wasserspiegel, Pegel
- Geschwindigkeit v_{ef} ,
Darcy-Geschwindigkeit v ,
Strömung q

$$v = q / S$$

- Porosität

Problém proudění podzemní vody / Problem der Strömung des Grundwassers

řídící rovnice:

- ustálené proudění

Steuerungsgleiche:

- konsolidierte Strömung

$$v = -K \operatorname{grad} h$$

$$\operatorname{div} v = W$$

$$\operatorname{div}(K \operatorname{grad} h) + W = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) + W = 0$$

$$K_{xx} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + W = 0$$

Problém proudění podzemní vody / Problem der Strömung des Grundwassers

řídící rovnice:

- neustálené (transientní) proudění

Steuerungsgleiche:

- unkonsolidierte (transistente) Strömung

$$v = -K \operatorname{grad} h$$

$$S_s \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div} v = W$$

$$\operatorname{div}(K \operatorname{grad} h) + W = S_s \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$K_{xx} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + W = S_s \frac{\partial h}{\partial t}$$

Problém proudění podzemní vody / Problem der Strömung des Grundwassers

- koeficient hydraulické propustnosti:
- Koeffizient der hydraulischen Durchlässigkeit

$$K = \begin{pmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{pmatrix} \text{ [m/s]}$$

- Specifická storativita
 - Storativität
- $$S_s \text{ [1/m]}$$
- Zdroje/propady
 - Quellen / Durchsacken
- $$W \text{ [1/s]}$$

Problém proudění podzemní vody / Problem der Strömung des Grundwassers

- oblast řešení:
 - časový interval $\langle 0, T \rangle$ x oblast Ω
 $\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$
- okrajové podmínky:
 - Dirichletovy: $h = h_D$
 - Neumannovy: $v \cdot n = v_N$
 - Newtonovy: $v \cdot n = \sigma(h - h_D)$na hranici $\partial\Omega$ pro všechny časy
- počáteční podmínky:
 - $q = q_0$ v čase $t=0$ v celé oblasti Ω
- Lösungsbereich:
 - Zeitlicher Intervall $\langle 0, T \rangle$ x Raum Ω
 $\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$
- Randbedingungen:
 - Dirichlet: $h = h_D$
 - Neumann: $v \cdot n = v_N$
 - Newton: $v \cdot n = \sigma(h - h_D)$An der Grenze $\partial\Omega$ für alle Zeiten
- Anfangsbedingungen:
 - $q = q_0$ in der Zeit $t=0$ in dem gesamten Gebiet Ω

Numerické řešení / Numerische Lösung

- soustava (ne)lineárních algebraických rovnic:
- System von (nicht)linearen algebraischen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 & K_{xxi,j,k} \frac{h_{i-1,j,k,l} - 2h_{i,j,k,l} + h_{i+1,j,k,l}}{\Delta x^2} + K_{yyi,j,k} \frac{h_{i,j-1,k,l} - 2h_{i,j,k,l} + h_{i,j+1,k,l}}{\Delta y^2} + \\
 & + K_{zzz,i,j,k} \frac{h_{i,j,k-1,l} - 2h_{i,j,k,l} + h_{i,j,k+1,l}}{\Delta z^2} + W_{i,j,k} = S_{Si,j,k} \frac{h_{i,j,k,l} - h_{i,j,k,l-1}}{\Delta t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \square & 0 \\ 1 & 2 & \square & 0 \\ \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{1,1,1,1} \\ h_{2,1,1,1} \\ \square \\ h_{n_x, n_y, n_z, 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(W_{1,1,1}, h_{1,1,1,0}) \\ f(W_{2,1,1}, h_{2,1,1,0}) \\ \square \\ f(W_{n_x, n_y, n_z}, h_{n_x, n_y, n_z, 0}) \end{pmatrix}$$

Transport rozpuštěných látek / Transport von gelösten Stoffen

řídící rovnice:

Steuerungsgleiche:

$$\frac{\partial(\theta C^k)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\theta D_{ij} \frac{\partial C^k}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\theta v_i C^k) + q_s C_s^k + \sum R_n$$

C^k [kg/m³] koncentrace / Konzentration

θ [-] pórovitost / Porosität t [s]

D_{ij} [m²/s] disperze / Dispersion $x_i = x, y, z$ [m]

q_s [1/s] zdroje / Quellen C_s^k [kg/m³]

$\sum R_n$ [kg/m³/s] $v_i = q_i / \theta$ [m/s]

Transport rozpuštěných látek / Transport von gelösten Stoffen

řídící rovnice:

Steuerungsgleiche:

$$\frac{\partial(\theta C^k)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\theta D_{ij} \frac{\partial C^k}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\theta v_i C^k) + q_s C_s^k + \sum R_n$$

1
2
3
4

- 1) difuze – disperze
- 2) konvekce/advekce
- 3) Zdroje/propady
- 4) sorpce a kinetické chemické reakce

- 1) Diffusion – Dispersion
- 2) Konvektion / Advektion
- 3) Quellen / Durchsacken
- 4) Sorption und Kinetische chemische Reaktion

Pecletovo číslo

$$Pe = L v / D$$

Peclet-Nummer

Podélná a příčná disperzivita

$$D_T = D_L / 10$$

Längliche und Quer-Dispersion

Disperzivita, rozměr experimentu $D_L = 0.1 * L$

Dispersivität, Umfang des Experiments

Transport rozpuštěných látek / Transport von gelösten Stoffen

- oblast řešení:
časový interval $\langle 0, T \rangle \times$
oblast $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$
- okrajové podmínky:
 $C^K = C_D^K$ na hranici $\partial\Omega$ pro
všechny časy
- počáteční podmínky:
 $C^K = C_0^K$ v čase $t=0$ v celé
oblasti Ω
- Lösungsbereich:
Zeitlicher Intervall $\langle 0, T \rangle \times$
Raum $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$
- Randbedingungen:
 $C^K = C_D^K$ an der Grenze $\partial\Omega$ für
alle Zeiten
- Anfangsbedingungen:
 $C^K = C_0^K$ in der Zeit $t=0$ in dem
gesamten Gebiet Ω